

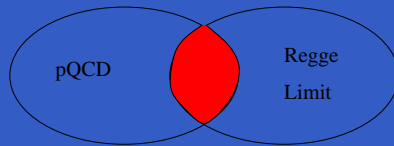
# QCD a piccoli $x$

Gian Paolo Vacca

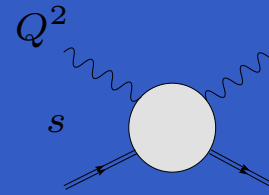
INFN Bologna



# Cinematica ad alte energie



Limite di Regge:  $s \gg -t, \dots \gg \Lambda_{QCD}^2$



Piccoli x:  $x \approx Q^2/s \ll 1, \quad Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$

- DGLAP: Fattorizzazione collineare:  $Q^2 \gg k^2 \approx 0$

$$\sigma(x, Q^2) \sim \int \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}\right) f(z, Q^2)$$

$f$  PDF (evoluzione DGLAP).

- BFKL: Fattorizzazione di alta energia (Regge) ( $k_T$ ):  $s \gg Q^2 \approx k^2$

$$\sigma(x, Q^2) \sim \int d^2k \int \frac{dz}{z} \hat{\sigma}\left(\frac{x}{z}, k\right) \mathcal{F}(z, k) \sim \int d^2k \Phi(Q^2, k) G(x, k)$$

$\mathcal{F}$  PDF non integrate (evoluzione BFKL).

- CCFM: interpola BFKL e DGLAP  
approccio usato in MC (Cascade)

# DGLAP a (molto) piccoli $x$

- **Problema teorico**: risommazione non tiene conto del fatto che  $\alpha_s \ln \frac{1}{x} \gg 1$ .
- Funziona abbastanza bene a NLO. Però per distribuzione gluoniche ed  $F_L$  si possono presentare valori **negativi** a piccoli  $x$ !
- Recente studio (Ciafaloni, Colferai, Salam, Stasto -2003) mostra che risommazione termini  $\alpha_s \ln \frac{1}{x}$  è necessaria per  $x < x_{min}$  (inclusa parte dei dati HERA).
- **NNLO**: calcolo completato per caso non-singlet. Singlet?
- DGLAP è soprattutto utile come tool per l'uso della QCD in altri regimi cinematici, ma non è soddisfacente per una comprensione maggiore della QCD. Si tratta comunque di un'analisi **leading twist**.
- L'evoluzione lineare delle distribuzioni partoniche **viola l'unitarietà**.

# Effetti non lineari

- **Limite di Froissart:**  $\sigma \sim \ln^2 s$  é violato nel settore gluonico dai vari approcci lineari DGLAP e BFKL (sezione d'urto da teorema ottico basata su stati a 2 gluoni nel canale  $t$ )
- Si ritiene che effetti non lineari, per stati di alta densità gluonica, siano cruciali. In tale situazione si presentano
  - fusione di partoni → saturazione
  - multi scattering → shadowing (es. Deutone)
- Per studiare tali fenomeni occorre andare oltre l'approssimazione leading twist.
- Nell'ambito dell'approccio BFKL alcuni passi avanti in questa direzione sono stati fatti: Bartels (1993), Balitsky (1996), Mueller-Kovchegov (1993-1999), JIMWLK (1996-2002) .

# Scaling geometrico e saturazione

- Recentemente é stata osservata nei dati di HERA a piccoli  $x$  ( $x \leq 10^{-2}$ ) una proprietá interessante detta **scaling geometrico**

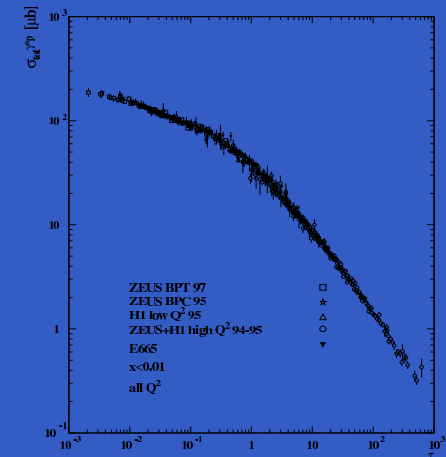
La sezione d'urto a piccoli  $x$  ha una dipendenza funzionale:

$$\sigma_{\gamma^* p}(Q^2, x) \approx \sigma \left( \frac{Q^2}{Q_s^2(x)} \right)$$

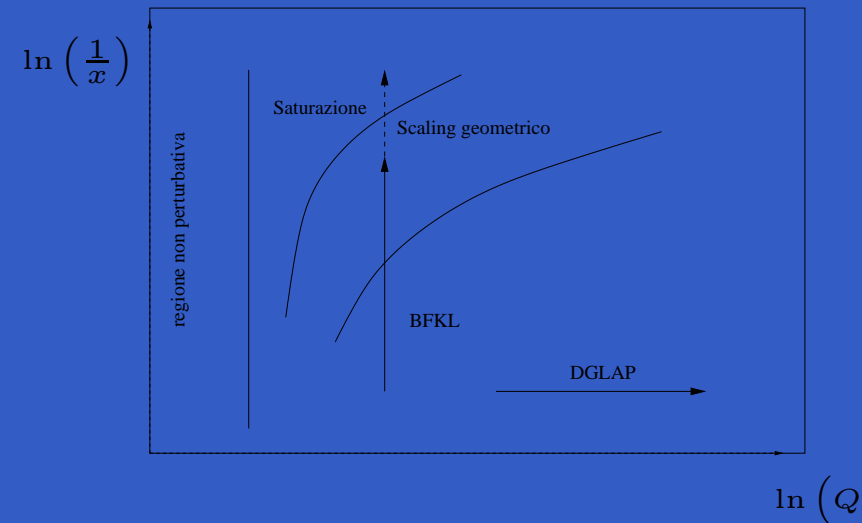
con  $Q_s^2 \sim Q_0^2 \left( \frac{x_0}{x} \right)^\lambda$  detta scala di saturazione.  
 $Q_s \simeq 1\text{GeV}$  ad HERA.

- Ciò é compatibile con l'esistenza di una regione di **saturazione** con un'unica scala rilevante a causa dell'alta densita' di gluoni (**Color Glass Condensate**) dal quale deriva lo **scaling**.

Se confermata sperimentalmente, la scala di saturazione costituirebbe una scala **perturbativa** effettiva che avrebbe origine da forti interazioni non lineari.



$$0.045 \leq Q^2 \leq 450$$



# BFKL, dipoli di colore ed effetti non lineari

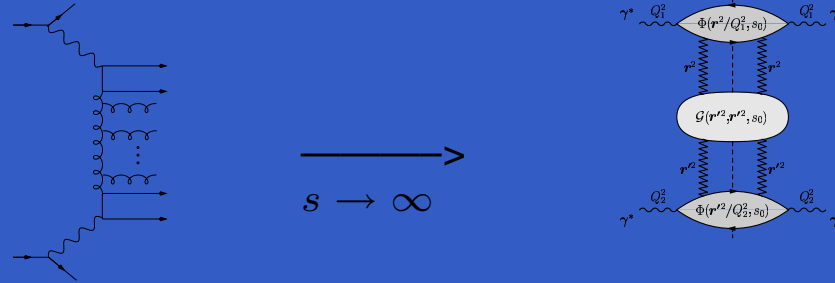
- Approccio BFKL
- Legame con formulazione Dipoli di Colore
- Stati multigluonici e correzioni non lineari
- Relazioni con l'approccio di Dipolo di Colore
- Alcune proprietà
- Conclusioni

# BFKL : 1

Ingredienti:

*Fattori d'impatto* + *funzione di Green BFKL*

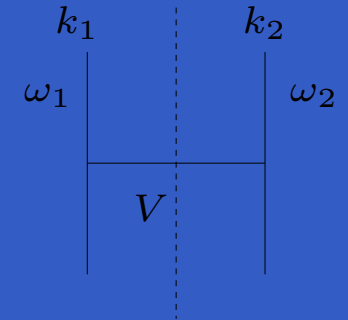
Risommazione



$$G = \sum_n a_n^{LL} (\alpha_s \ln s)^n + \sum_n a_n^{NLL} \alpha_s (\alpha_s \ln s)^n + \dots$$

$G$  definita da soluzione di eq. lineare per evoluzione in  $y \approx \ln s \approx \ln \frac{1}{x}$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} G = \delta + K_{BFKL} G, \quad K_{BFKL} = \omega_1 + \omega_2 + V$$



**Octet kernel non forward (LL, NLL)** : Eq. di Bootstrap  $\rightarrow$  unitarieta nel canale  $s$  per stato ottetto di colore nel canale  $t \rightarrow$  **reggeizzazione gluone**

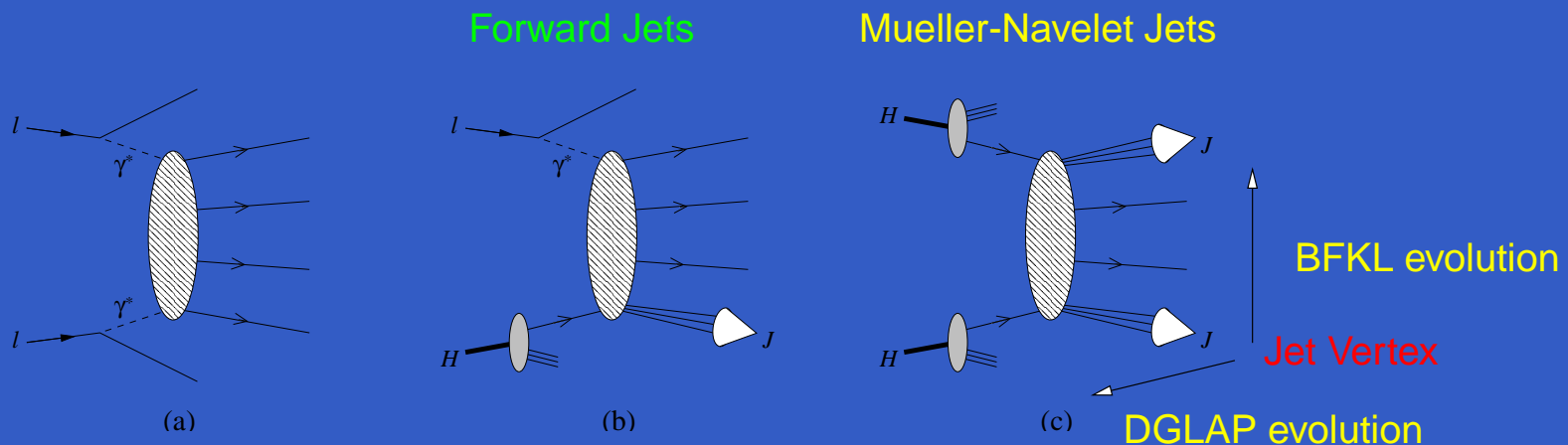
$$K_{BFKL}^{(8)} \psi_g = \omega(k_1 + k_2) \psi_g$$

**Singlet kernel forward (LL, NLL)** : Funzioni struttura, sezioni d'urto

**Singlet kernel non forward (LL)** : Fisica diffrattiva

# BFKL: 2

- **LL**: non va bene fenomenologicamente (regime troppo asintotico).  
Inoltre  $\sigma \sim x^{-\omega}$  con  $\omega \approx 0.5$ .  $\alpha_s$  costante. Evoluzione porta ad invadere la zona I.R.
- **NLL** Nella funzione di Green é necessario operare una risommazione per sopprimere divergenze collineari. (Occorre far convivere la fattorizzazione ad alte energie con il gruppo di rinormalizzazione)  
**Cura**: risommazione e di termini di ordine superiore. Nuove funzioni di Green disponibili. ( $\omega_{eff} \simeq 0.2$ ).
- **Fattori di impatto NLL** Sono noti quelli colorati di quark e gluoni (Fadin) ed il vertice di produzione di Jet (Bartels, Colferai, G.P.V.).  
IL fattore di impatto del fotone non é ancora stato completato all'ordine NLL (Fadin - Bartels, Colferai, Gieseke, Kyrieleis, Qiao).
- Applicazione ad analisi dei **Mueller-Navelet jets**: **work in progress!**





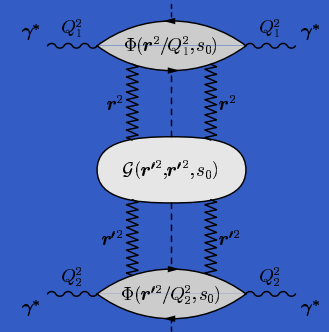
# BFKL LL $\rightarrow$ Approccio Dipoli : 1

Nell'approccio dei dipoli la funzione d'onda del fotone virtuale viene scomposta nelle sue componenti di Fock, nell'approssimazione  $N_c \rightarrow \infty$  (Nikolaev, Zakharov - Mueller). Per  $N_c$  finito si hanno in generale matrici densità di colore.

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_{bare} + |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + \dots$$

Sezioni d'urto all'ordine piú basso (notazione compatta)

$$\sigma = \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 \int_0^1 dx |\psi_p(\rho_1, \rho_2)|^2 N_{\rho_1, \rho_2}(Y) = |\psi|^2 N = \Phi_1 G \Phi_2.$$



$N_{\rho_1, \rho_2}(Y)$  ha evoluz. BFKL LL, grazie a liberta di gauge nell'accoppiamento ai fattori d'impatto:

$\Phi = |\psi|^2 \theta_{IR}$ ,  $\theta_{IR} = e^{ik_1 \rho_{12}} (1 - e^{-ik_1 \rho_{12}}) (1 - e^{ik_2 \rho_{12}})$  e definendo

$$\theta^{UV} f(\rho_1, \rho_2) = f(\rho_1, \rho_2) - \frac{1}{2} f(\rho_1, \rho_1) - \frac{1}{2} f(\rho_2, \rho_2) \quad \text{si ottiene}$$

$$\Phi_1 G \Phi_2 = |\psi|^2 \theta_{IR} G \Phi_2 = |\psi|^2 \theta_{IR} \theta^{UV} G \Phi_2 = |\psi|^2 \theta^{UV} G \Phi_2 = |\psi|^2 N$$

- Definizione con funzione di Green BFKL proiettata su un fattore d'impatto + invarianza autostati del kernel BFKL rispetto la sottrazione definita da  $\theta^{UV} \Rightarrow N_{\rho_1, \rho_2}(Y)$  soddisfa l'evoluzione BFKL. Vale  $N_{\rho, \rho}(Y) = 0$  (Rappresentazione di Möbius)

# BFKL LL $\rightarrow$ Approccio Dipoli : 2

Riscriviamo adesso l'equazione BFKL nella forma conosciuta per i dipoli di colore  $N$

Libertá di gauge  $\rightarrow$  **Invarianza Conforme**

Kernel  $H = h + h^*$  inv. conforme definisce  $G$

$$\frac{\partial}{\partial y} G = \delta - \frac{\bar{\alpha}_s}{2} H G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{propagatore di 2 gluoni : } \ln |\rho_{11'}|^2 \ln |\rho_{22'}|^2 \\ \text{libertá di gauge : } \Phi(k_1, k_2) \rightarrow 0, k_i \rightarrow 0 \\ \text{inv. conforme : } 2 \ln \frac{|\rho_{11'}| |\rho_{22'}|}{|\rho_{12'}| |\rho_{21'}|} \ln \frac{|\rho_{11'}| |\rho_{22'}|}{|\rho_{12}| |\rho_{1'2'}|} \end{array} \right.$$

$$h = \sum_{r=1}^2 \left( \ln p_r + \frac{1}{p_r} \ln(\rho_{12}) p_r - \Psi(1) \right) = \sum_{r=1}^2 \left( \ln \rho_{12} + \rho_{12} \ln(p_r) \frac{1}{\rho_{12}} - \Psi(1) \right),$$

grazie alle relazioni

$$\log p = \frac{i}{\rho p} + \rho \log p \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{p} \log \rho p = -\frac{i}{\rho p} + \log \rho.$$

Pertanto l'azione del kernel puó essere scritta:

$$- H \Psi = - \left( 2 \ln |\rho_{12}|^2 + |\rho_{12}|^2 \ln |p_1 p_2|^2 \frac{1}{|\rho_{12}|^2} - 4 \Psi(1) \right) \Psi$$

$$= \int \frac{d^2 \rho_3}{\pi} \frac{|\rho_{12}|^2}{|\rho_{13}|^2 |\rho_{23}|^2} (f_\omega(\rho_1, \rho_3) + f_\omega(\rho_3, \rho_2) - f_\omega(\rho_1, \rho_2))$$

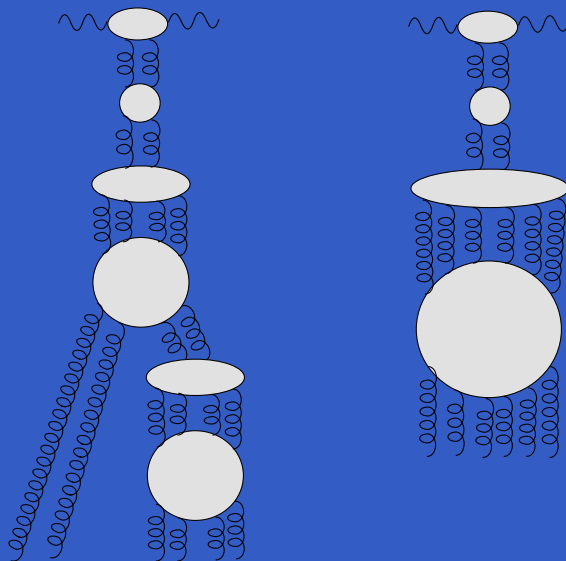
# Stati multigluonici (LL) e correzioni non lineari

- Stati di  $n$  gluoni reggeizzati: sono propagati in rapidità dalle funzioni di Green:

$$\frac{\partial}{\partial y} G_n = \delta - \frac{\bar{\alpha}_s}{2} H_n G_n, \quad H_n = -\frac{1}{N_c} \sum_{i < j} T_i^a T_j^a H_{ij}$$

- Anche tali sistemi posseggono la simmetria conforme  $SL(2, C)$ .
  - Il caso  $n = 3$  simmetrico é legato all'**Odderone**.
  - Nel limite  $N_c \rightarrow \infty$  i sistemi ad  $n$  gluoni sono integrabili.
- Non linearità: si tratta di un'idea vecchia (GLR) , accoppiamento fra stati con numero  $n$  di gluoni diverso.

Risolvendo sistema di eq. accoppiate a  $\gamma^*$  fino a stati di 6 gluoni (Bartels, Ewerz) si ottengono termini non banali del tipo:



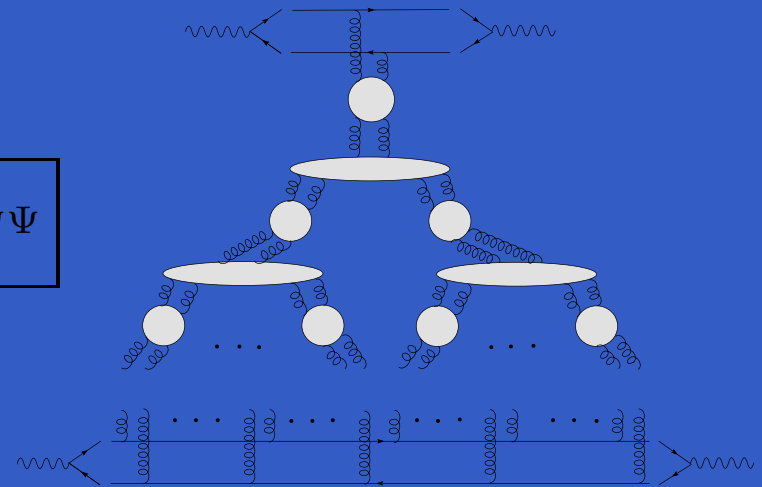
La prima struttura non banale é legata allo stato a 4 gluoni. É caratterizzata da  $G_4$  e  $V_{2 \rightarrow 4}$ , entrambi invarianti conformi.

Attenzione: una trattazione completamente unitaria nel canale  $t$  richiederebbe anche i processi “opposti” di fusione.

# Risommazione effetti non lineari: $N_c \rightarrow \infty$

- $N_c \rightarrow \infty \Rightarrow G_4 \rightarrow G_2 \otimes G_2$
- Pertanto posso risommare gli effetti **non lineari** in termini di stati a 2 gluoni, nel caso di scattering multipli indipendenti (eiconali) sul bersaglio.  
É il contributo di tutti i possibili diagrammi a ventaglio (**fan diagrams**).

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi = -\frac{\bar{\alpha}_s}{2} H_2 \Psi - \bar{\alpha}_s^2 \mathcal{V} \otimes \Psi \Psi$$



- Occorre analizzare la struttura di  $\mathcal{V}$ :

$$\bar{\alpha}_s^2 \mathcal{V}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} V(1234) + \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_2 a_4} V(1324) + \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3} V(1423)$$

- $V(k_1, k_2, k_3, k_4)$  descrive un operatore molto complicato, però gode della proprietà :  
 $V(k_1, k_2, k_3, k_4) \rightarrow 0, k_i \rightarrow 0$ .

# Risommazione effetti non lineari: $N_c \rightarrow \infty$ contd.

- Nel limite  $N_c \rightarrow \infty$  il vertice si semplifica :  
 $\bar{\alpha}_s^2 \mathcal{V}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \approx \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} V(1234)$
- La libertà di gauge permette di considerare  $\tilde{\Psi}$  nella rappresentazione di Möbius e  $\bar{\alpha}_s^2 \mathcal{V} \otimes \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}$  si semplifica enormemente:

$$\bar{\alpha}_s^2 \mathcal{V} \otimes \tilde{\Psi} \tilde{\Psi} \rightarrow -4 \frac{g^2}{2} \frac{g^2 N_c}{8\pi^3} \int d^2 \rho_3 \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2 \rho_{23}^2} \tilde{\Psi}(\rho_1, \rho_3) \tilde{\Psi}(\rho_3, \rho_2)$$

- Riscalando si può allora definire la densità di dipolo  $N = B \tilde{\Psi}$  che soddisfa quindi l'equazione

$$\frac{d}{dY} N_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 z}{2\pi} \frac{|x - y|^2}{|x - z|^2 |y - z|^2} (N_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} + N_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} - N_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} - N_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} N_{\mathbf{y}, \mathbf{z}})$$

É l'equazione di **Balitsky-Kovchegov (BK)**.

# Risommazione effetti non lineari: NLO in $1/N_c$

J.Bartels, L.N.Lipatov, G.P.V.

- L'analisi dei termini non planari del vertice  $\mathcal{V}$  produce un contributo compatibile con la struttura "fan" e quindi con l'equazione BK:

$$\bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 z}{2\pi} \frac{|x-y|^2}{|x-z|^2 |y-z|^2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{N_c^2 - 1} (N_{\mathbf{x},\mathbf{z}} + N_{\mathbf{z},\mathbf{y}} - N_{\mathbf{x},\mathbf{y}})^2 \right]$$

- Contribuiscono anche le interazioni non planari nel kernel di evoluzione  $H_4$  per stati a 4 gluoni. Occorre espandere al primo ordine l'eq. lineare:

$$N_4(1234, Y) = N(12, Y)N(34, Y) + \Delta N_4(1234, Y), \quad \frac{\partial}{\partial y} N_4 = \delta - \frac{\bar{\alpha}_s}{2} H_4 N_4$$

- Generalizzazione NLO dell'equazione BK: due equazioni accoppiate (non lin + lin)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} N_{\mathbf{x},\mathbf{y}} &= \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 z}{2\pi} \frac{|x-y|^2}{|x-z|^2 |y-z|^2} \left[ N_{\mathbf{x},\mathbf{z}} + N_{\mathbf{z},\mathbf{y}} - N_{\mathbf{x},\mathbf{y}} - N_{\mathbf{x},\mathbf{z}} N_{\mathbf{z},\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. - \Delta N_4(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \frac{1}{2} \frac{1}{N_c^2 - 1} (N_{\mathbf{x},\mathbf{z}} + N_{\mathbf{z},\mathbf{y}} - N_{\mathbf{x},\mathbf{y}})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \Delta N_4(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) &= -\frac{\bar{\alpha}_s}{2(N_c^2 - 1)} (H_{12} + H_{34}) (N_{\rho_1, \rho_3} N_{\rho_2, \rho_4} + N_{\rho_1, \rho_4} N_{\rho_2, \rho_3}) \\ &\quad - \frac{\bar{\alpha}_s}{2} (H_{12} + H_{34}) \Delta N_4(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) \end{aligned}$$

# Equazione BK, saturazione e scaling

- L'eq. BK si può scrivere nella forma simbolica:

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{N} = \bar{\alpha}_s \chi(\partial_{\ln k}) \tilde{N} - \bar{\alpha}_s \tilde{N}^2$$

ed espandendo nell'approssimazione quadratica l'operatore  $\chi(\partial_{\ln k})$  (Munier, Peschanski) si ottiene l'equazione di Fisher-KPP le cui soluzioni in serie asintotica sono note.

- Asintoticamente onde  $\Rightarrow$  scaling + pattern universale di violazione subasintotica dello scaling. Appare la fase di saturazione alla scala di saturazione.

$$\tilde{N}(Y, k) = \tilde{N} \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right), \quad Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\lambda Y}$$

- La zona di scaling si estende parzialmente nella zona di regime lineare (BFKL):

$$Q_s^2 < Q^2 < Q_s^4 / \Lambda_{QCD}^2$$

- Comportamento indipendente da condizioni iniziali (universale).

Caratteristiche **qualitativamente** interessanti

# Aspetti sperimentali e teorici

- Maggiori test sperimentali su eventuale saturazione (scaling già osservato).
- Saturazione ad LHC? Forse  $Q_s^2(x = 10^{-7}) \simeq 10\text{GeV}^2$  é un valore troppo basso ( $Q^2 \geq 100\text{GeV}^2$ ).
- Legame con fisica ioni pesanti.

## Teoricamente:

- Occorre studiare bene la dipendenza da parametro d'impatto.
- Occorre studiare correzioni oltre l'approssimazione  $N_c \rightarrow \infty$ .  
Alcune analisi con eq. di Langevin e Fokker-Planck su funzionali generatori mostrano stesso quadro qualitativo.
- Analisi parziali con inclusione ad hoc del running coupling non sono sufficienti.  
L'approccio naturale sarebbe riformulare nell'ambito NLL BFKL + cura con risommazione.  
Si tratta pero' di un'analisi molto complessa.
- Descrizioni analoghe (all'ordine leading in  $1/N_c$ ) sono state date (BMS) per fenomeni di radiazione di stato finale per osservabili del tipo "event shape".



# Conclusioni

- La regione cinematica a **piccoli  $x$**  da l'opportunità di sondare molteplici aspetti non convenzionali della QCD, anche se i **molto piccoli  $x$**  sono spesso al limite delle possibilità di osservazioni sperimentali nei collider attuali.
- Promettenti progressi e maturazione delle tecniche all'ordine NLL.
- Inclusione di effetti non lineari : cresciuto interesse in relazione ai fenomeni di scaling e saturazione.  
Se una fase di saturazione fosse accessibile e confermata sperimentalmente si avrebbe un passo avanti nella comprensione di un aspetto non banale della QCD.