

CALCOLO ANALITICO DEI  
DIAGRAMMI CON LE EQUAZIONI  
DIFFERENZIALI ED  
UNA APPLICAZIONE

U. AGLIETTI  
TORINO  
15 / 04 / 04

# PIANO DEL SEMINARIO:

## 1) METODO DELLE EQUAZIONI DI EVOLUZIONE NEGLI INVARIANTI CINEMATICI ESTERNI O NELLE MASSE

a) RIDUZIONE DEI DIAGRAMMI AI MASTER INTEGRALS ;  $\approx$  (INTEGRALE) =  $\frac{2}{3} \bar{u}$

b) CALCOLO DEI MASTER INTEGRALS ;  $\approx \pi = 3.1415 \dots$

## 2) CONTRIBUTO A 2 LOOPS DA FERMIONI LEGGERI A

$$q + q \rightarrow H$$

$$(H \rightarrow q + q)$$

e

$$H \rightarrow \gamma + \gamma$$

# RIDUZIONE AI MASTER INTEGRALS :

SCHEMA TOP-DOWN

1) DIAGRAMMA ORIGINALE, TENSORE  $(T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \epsilon_1^{\mu} \epsilon_2^{\nu} \rightarrow H)$   
IN  $gg \rightarrow H$

↓ PROIEZIONE SU FATTORI  
DI FORMA INVARIANTI

2) AMPIEZZE SCALARI DIPENDENTI

↓ ROTAZIONE INVARIANTI  
DI LOOP

3) AMPIEZZE SCALARI INDIPENDENTI

(DIAGRAMMA AUSILIARIO O SHIFT  
MOMENTI DI LOOP)

↓ INTEGRATION BY PARTS  
IDENTITIES

4) MASTER INTEGRALS

# CALCOLO DEI MASTER INTEGRALS:

1) MASTER INTEGRAL(S)  $F(s)$

⇓ DERIVAZIONE RISPETTO AD  $s = E_{CM}^2$   
 (INVARIANTE CINEMATICO ESTERNO O MASSA)

2)  $\frac{dF}{ds} =$  SOMMA AMPIEZZE SCALARI  
 DIPENDENTI

⇓ ROTAZIONE INVARIANTI,  
 INTEGRATION BY PARTS IDENTITIES (VEDI PRIMA)

3)  $\frac{dF}{ds} =$  COMBINAZIONE LINEARE DI  
 MASTER INTEGRALS

$$= A(s, D) F(s) + \Omega(s)$$

↳ TERMINE NOTO

⇓ SOLUZIONE RICORSIVA IN  $\epsilon = 2 - \frac{D}{2}$   
 + DATI INIZIALI

4) ESPANSIONE DI LAURENT PER IL MI

$$F(s, D) = \frac{1}{\epsilon^2} F_{-2}(s) + \frac{1}{\epsilon} F_{-1}(s) + F_0(s) + \dots$$

SOLUZIONE RICORSIVA IN  $\epsilon$  ?

$$\frac{dF(s, \epsilon)}{ds} = (A_0(s) + \epsilon A_1(s)) F(s, \epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2} \Omega_{-2}(s) + \frac{1}{\epsilon} \Omega_{-1}(s) + \Omega_0(s) + \dots$$

PONGO:

$$F(s, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} F_{-2}(s) + \frac{1}{\epsilon} F_{-1}(s) + F_0(s) + \epsilon F_1(s) + \dots$$

OTTENGO:

$$\frac{dF_{-2}}{ds} = A_0 F_{-2} + \Omega_{-2}$$

$$\frac{dF_{-1}}{ds} = A_1 F_{-2} + A_0 F_{-1} + \Omega_{-1}$$

.....

(A. KOTIKOV,  
E. REMIDDI,  
T. GEHRMANN  
& E. REMIDDI)

GERARCHIA DI EQUAZIONI DA RISOLVERE  
A PARTIRE DAL POLO DI ORDINE PIU' ELEVATO -

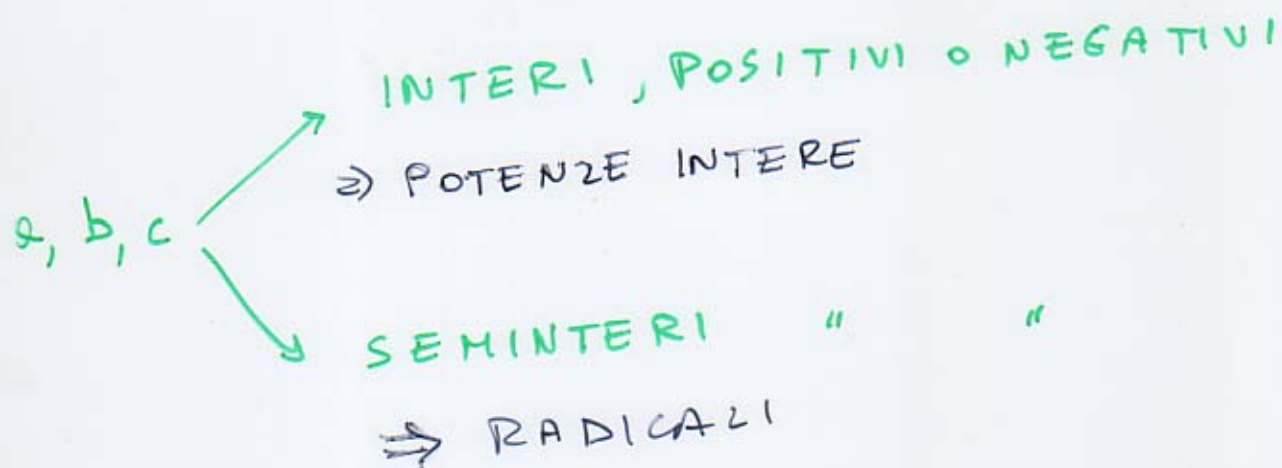
COL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

FORMA TIPICA EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$\frac{dF_K}{ds} = \left( \frac{a}{s} + \frac{b}{s-u^2} + \frac{c}{s-4u^2} \right) F_K + \tilde{\mathcal{I}}_K(s)$$

↓  
TERMINE  
NOTO, ASSOCIATO  
ALLE SOTTOLOGIE

IL COEFFICIENTE DELL'INCOGNITA  
RIFLETTE LA STRUTTURA DI  
SOGLIA DEL DIAGRAMMA



ES.

$a=1, b=-1 : F_K^{\text{omog}} = \frac{s}{s-u^2}$

$c=0$

$a=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}, : F_K^{\text{omog}} = \frac{1}{\sqrt{s(s-4u^2)}}$

$b=0$

# POLILOGARITMI ARMONICI

(7)

COSTITUISCONO UNA BASE MOLTO NATURALE  
DI FUNZIONI SPECIALI DA USARE NEL  
CALCOLO DEI MASTER INTEGRALS CON LE  
EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

L'IDEA È DI "ISOLARE" LA PARTE  
TRASCENDENTE DI UN INTEGRALE IN  
FUNZIONI TRASCENDENTI, DEFINITE UNA  
VOLTA PER TUTTE, FACENDO SOLAMENTE  
OPERAZIONI LINEARI: INTEGRAZIONI PER  
PARTI E PARTIAL FRACTIONING.

$$\text{INTEGRALE} \Rightarrow \text{Li}_2(x^2) + \text{Li}(\sqrt{x}) + \dots \} \underline{\text{No!}}$$

↓                      ↓

È PROPRIO QUELLO CHE NON DEVE  
SUCCEDERE

(PER ARRIVARE AD UNA RAPPRESENTAZIONE  
UNICA CI VOGLIONO COMPLICATE TRASFORMAZIONI  
NON LINEARI!)

# CI SI RIDUCE AD INTEGRAZI DEL

TIPO:

$$\int_0^s \frac{ds'}{s' - 4u^2} \int_0^{s'} \frac{ds''}{s''} \int_0^{s''} \frac{ds'''}{s''' - u^2}$$

(J. VERMASEREN  
ed E. REMIDI,  
T. GEHRMANN  
ed E. REMIDI)

OD ANCHE

$$\int_0^s \frac{ds'}{\sqrt{s'(s' - 4u^2)}} \int_0^{s'} \frac{ds''}{s'' - 4u^2}$$

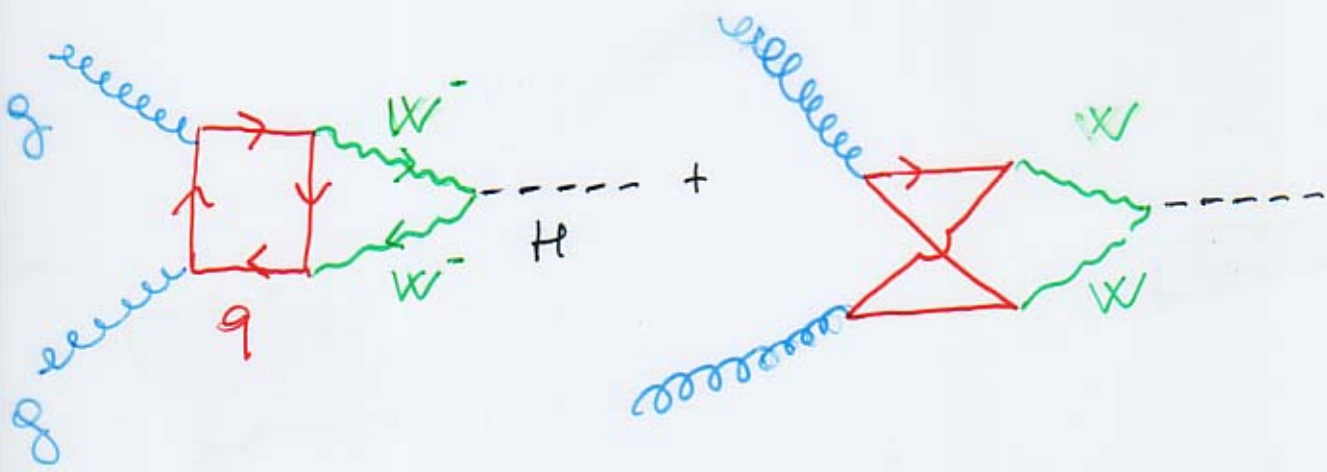
(R. BONCIANI  
ed V.A.)

⇒) BASTA DARE LORO UN NOME



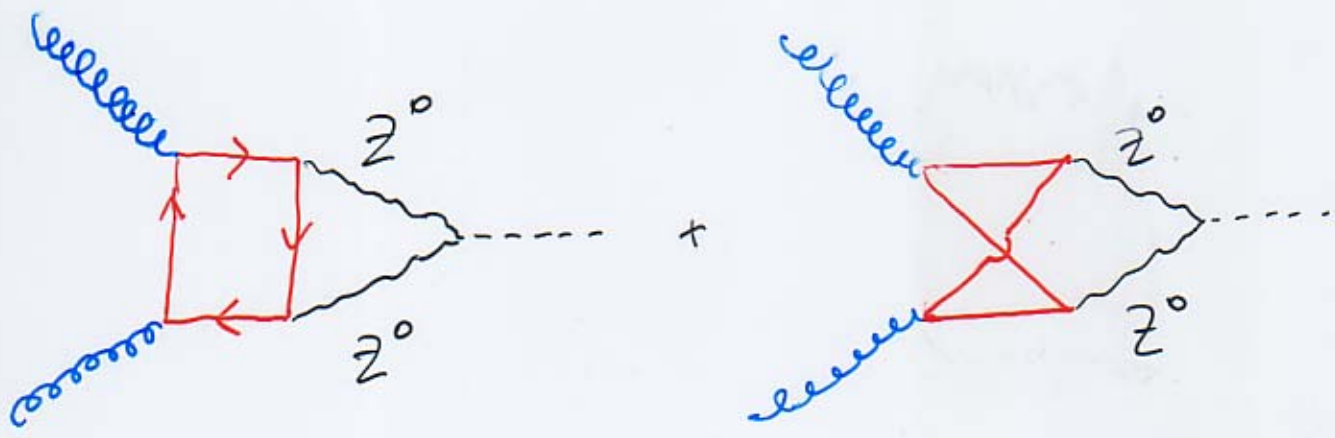
# PRODUZIONE DI HIGGS DALLA FUSIONE DI 2 GLUONI

AMPIEZZE A 2 LOOPS CONTENENTI QUARKS LEGGERI (MASSLESS):



PLANARE

INCROCIATO



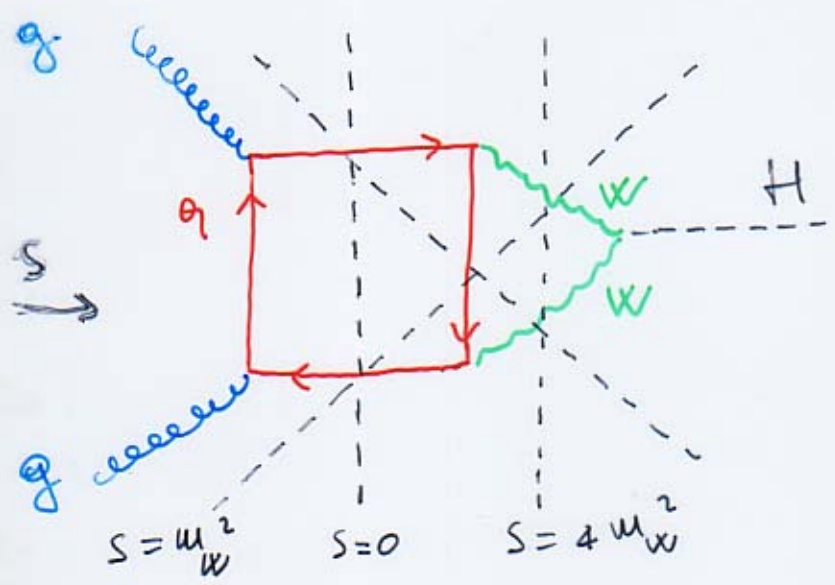
R. BONCIANI, G. DEGRASSI,  
A. VICINI ed u. A.  
hep-ph/0404071

PER QUESTI DIAGRAMMI L'ESPANSIONE (TRONCATA) A BASSO MOMENTO NON VA BENE PERCHE' CI SONO SOGLIE IN

$$S = 0, \quad u_w^2, \quad 4u_w^2$$



L'ESPANSIONE NON CONVERGE PER  $u_H^2 > u_w^2$



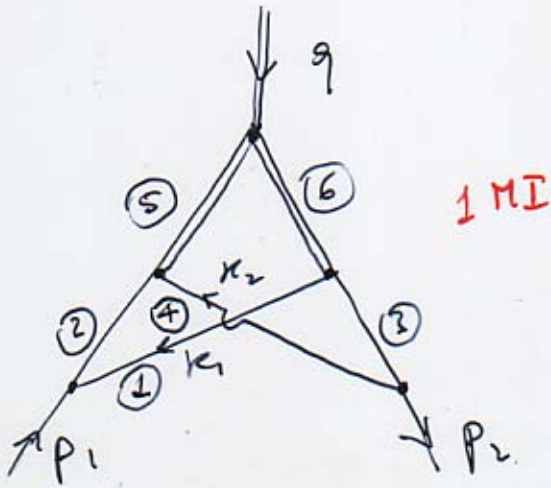
=> OCCORRE UN CALCOLO ESATTO DEI DIAGRAMMI (OUVERO RISOMMATO A TUTTI GLI ORDINI E CONTINUATO ANALITICA = MENTE)

# MASTER

# INTEGRALS: INCROCIATO

Job

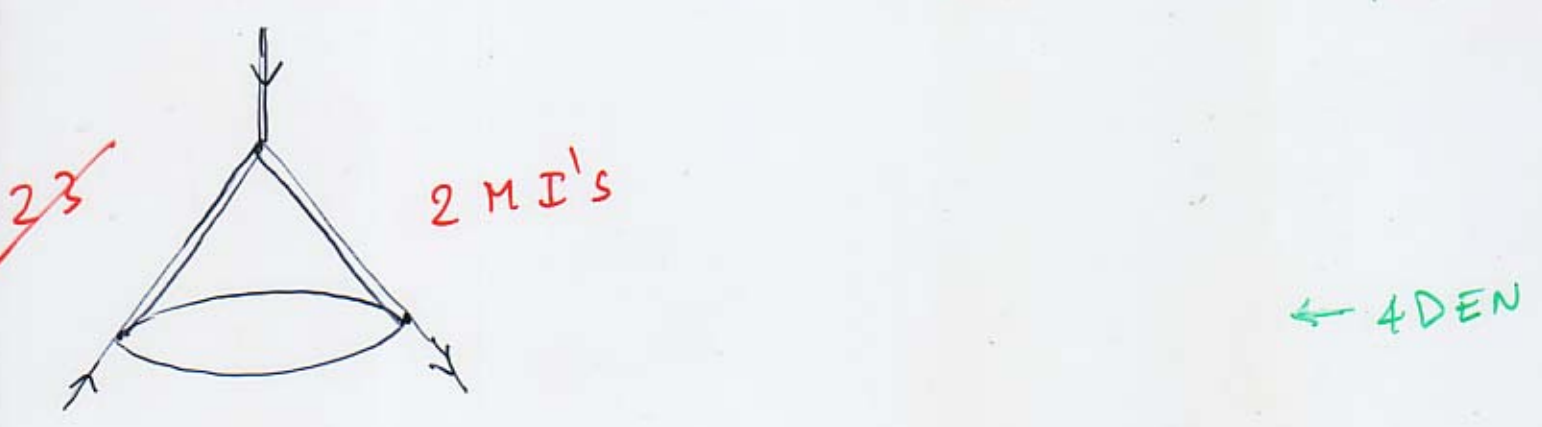
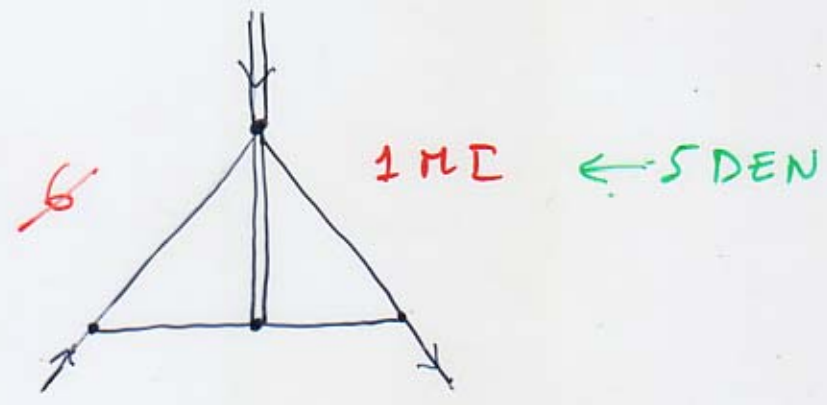
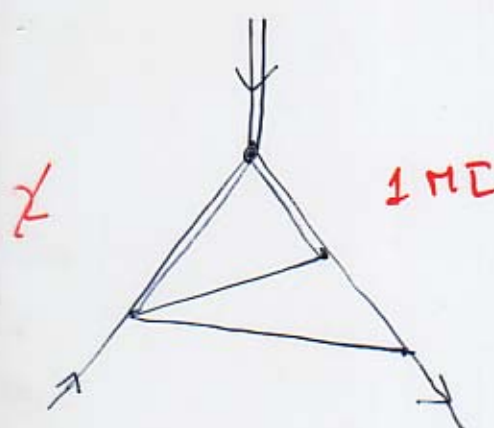
$$P_1^2 = 0, P_2^2 = 0, q^2 \neq 0$$



— = LINEA INTERNA MASSLESS

== = LINEA INTERNA MASSIVA

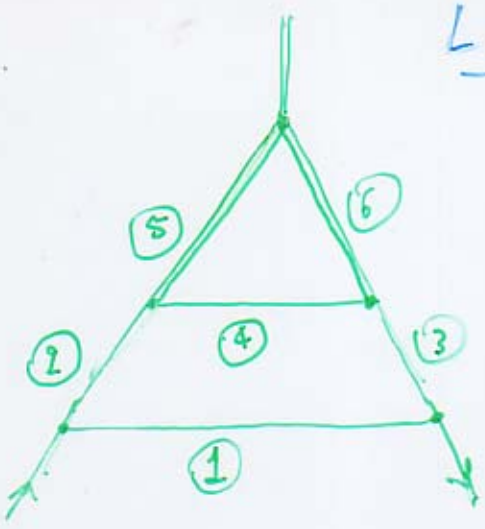
$$= \int d^M k_1 d^M k_2 \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6}$$



SI OTTENGONO DALLA CONTRAZIONE DEL DIAGRAMMA ORIGINARIO, CHE GENERA UNA PIRAMIDE DI SOTTODIAGRAMMI.

# LADDER PLANARE

(10c)



: NOMI, SI RIDUCE  
||  
MASTER INTEGRAL

MASTER INTEGRALS

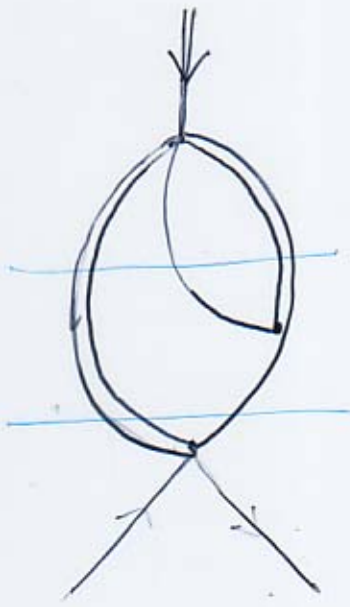


1 MI



1 MI

5 DEN



1 MI

4 DEN

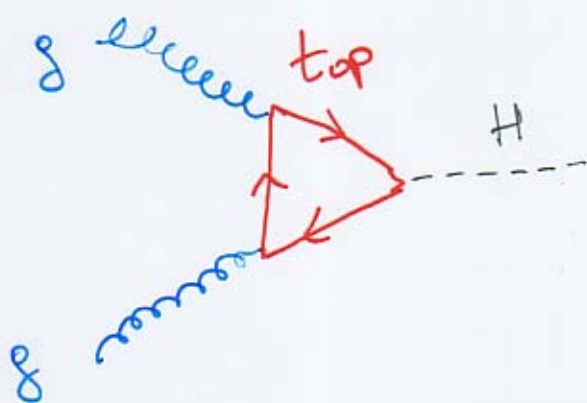
(R. BONCIANI, U.A.)

(11)

CORREZIONI ELETTRODEBOLI,  
GAUGE INVARIANTI ed UV ed IR FINITE,  
DI ORDINE

$$\frac{\alpha}{\bar{n} S_w^2} \sim 10^{-2}$$

ALL'AMPIEZZA AD 1 LOOP



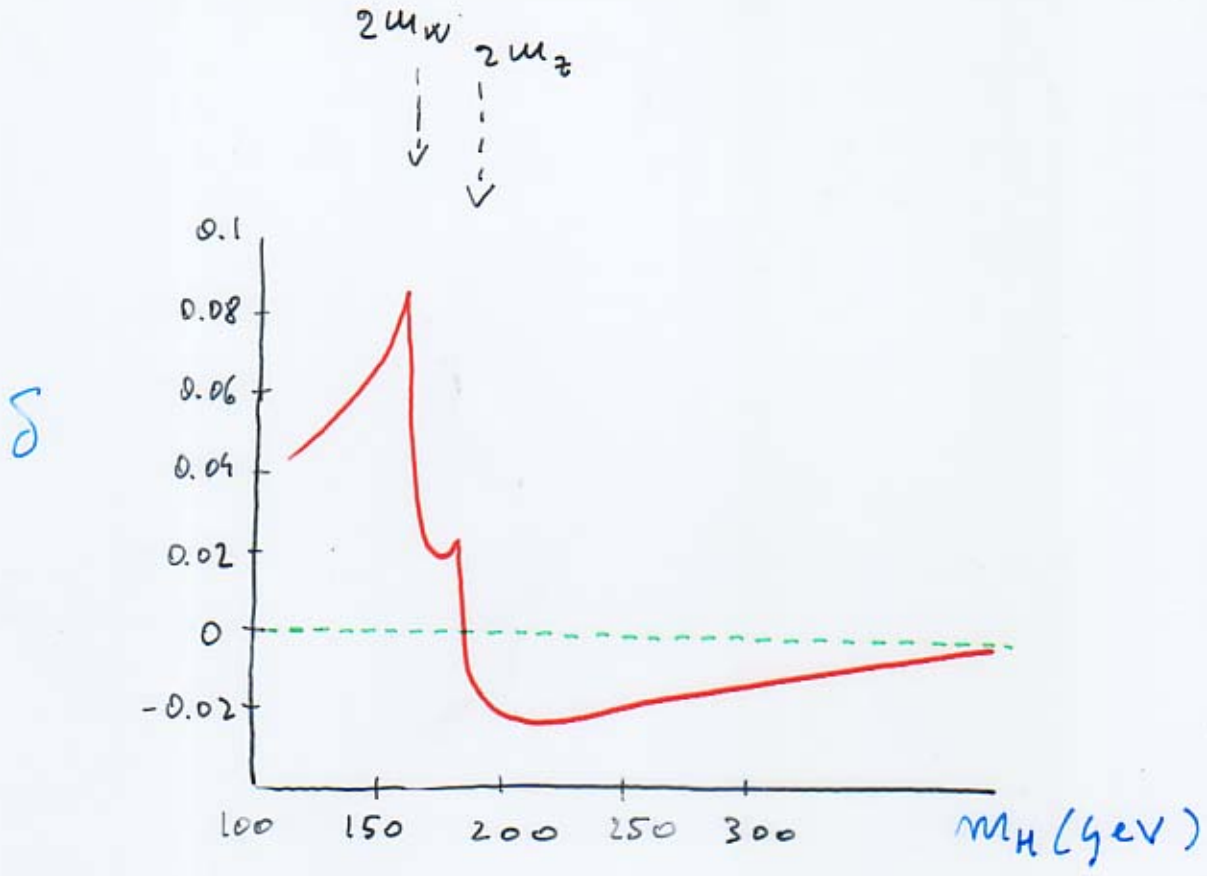
DI FATTO PIU' GRANDI NELLA REGIONE  
DI MASSA INTERMEDIA

$$m_H \lesssim 2 m_w$$

DOVE SONO

$$\delta = 4 \div 9 \%$$

POICHE'  $m_t > m_{w, z}$  E CI SONO EFFETTI DI SOGLIA



$$\delta \equiv \frac{\Gamma_{CORR}}{\Gamma_0}$$

LA CORREZIONE HA UN PICCO - MASSIMO ASSOLUTO - AD

$$m_H = 2 \mu_w$$

DOVE LA CORREZIONE RAGGIUNGE IL VALORE

$$\delta_{max} \sim 9\%$$

OSS: SI HA LA STESSA CORREZIONE

$\delta$  ANCHE AL DECADIMENTO DELL'HIGGS

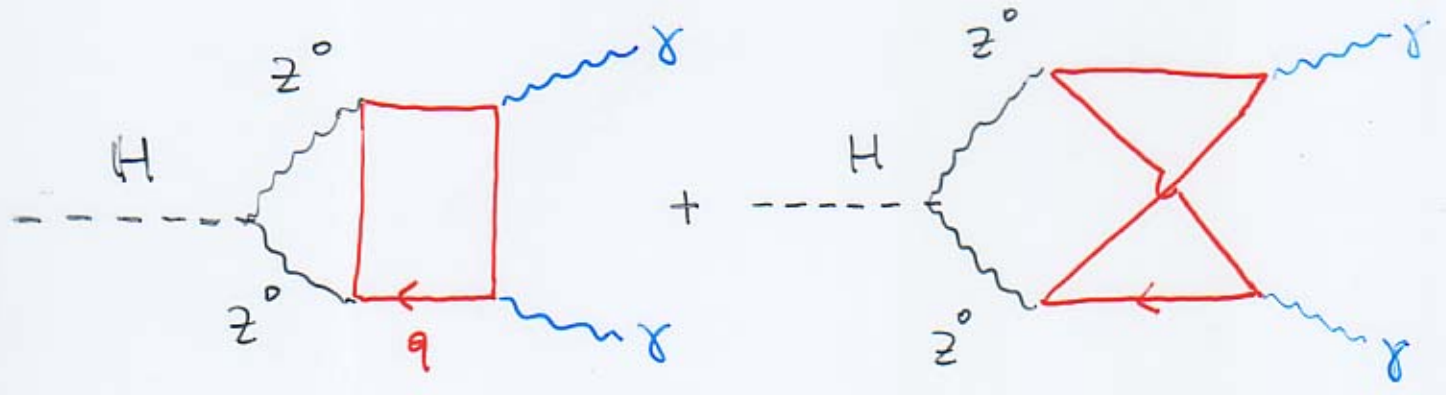
IN 2 GLUONI:

$$H \rightarrow gg$$

NON CI SONO INFATTI GRADI DI LIBERTA'  
NON BANALI DA INTEGRARE E L'AMPIEZZA  
E' UN NUMERO (COMPLESSO) -

# DECADIMENTO DELL'HIGGS IN 2 FOTONI

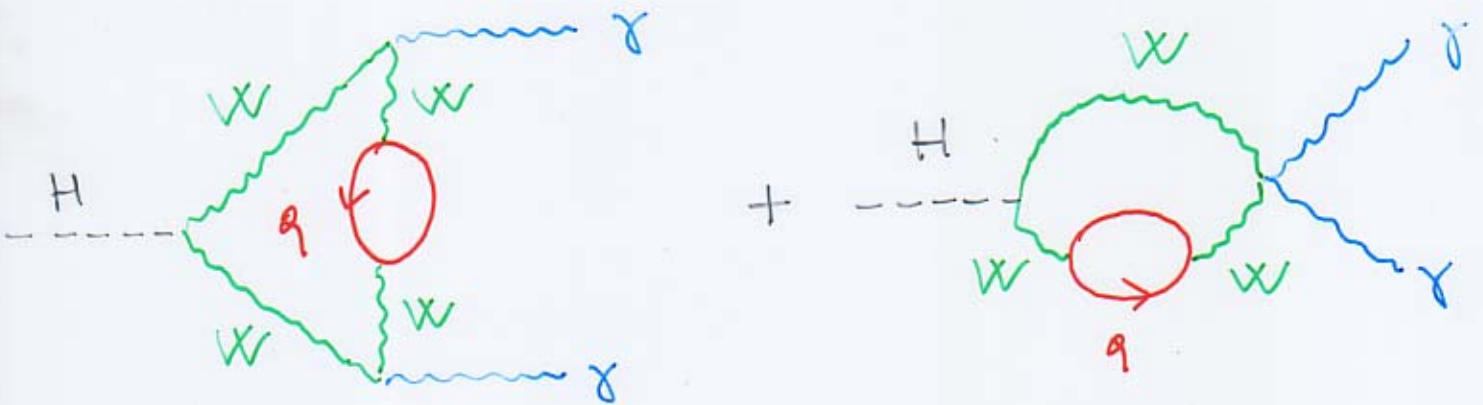
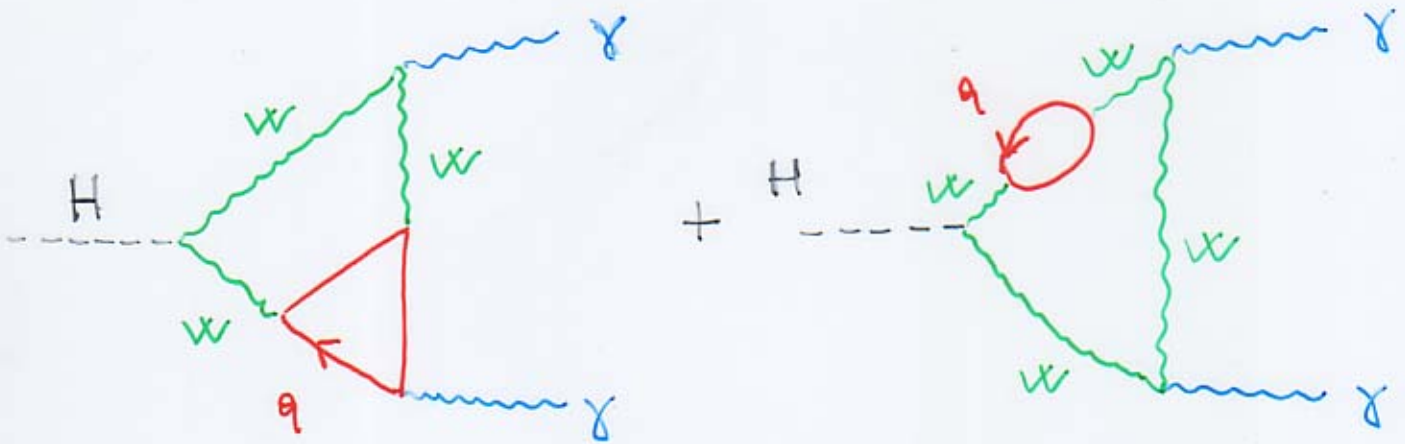
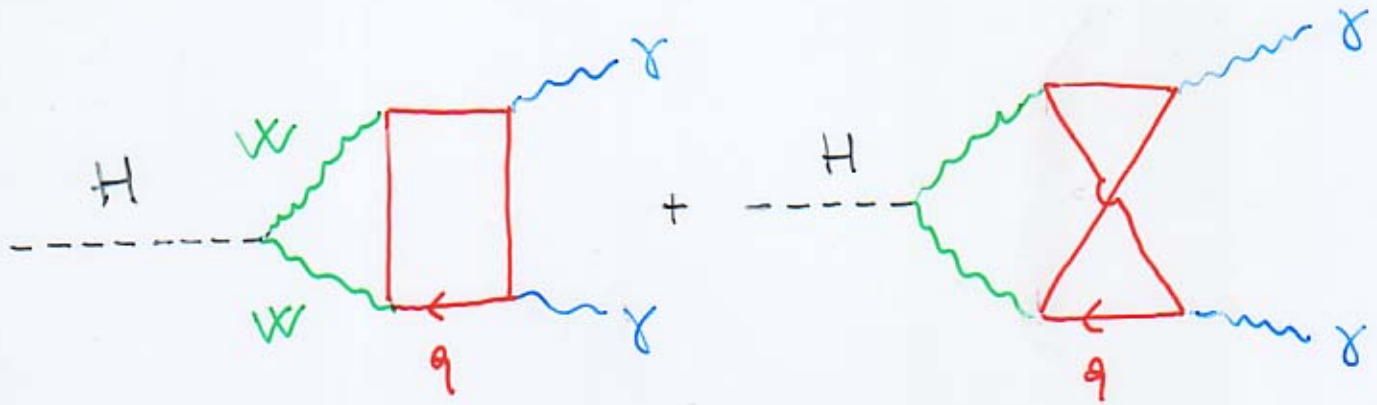
AMPIEZZE A 2 LOOPS CONTENENTI QUARKS LEGGERI e LO  $Z^0$ :



COME IN PRODUZIONE, GAUGE INVARIANTI ed UV, IR FINITE.

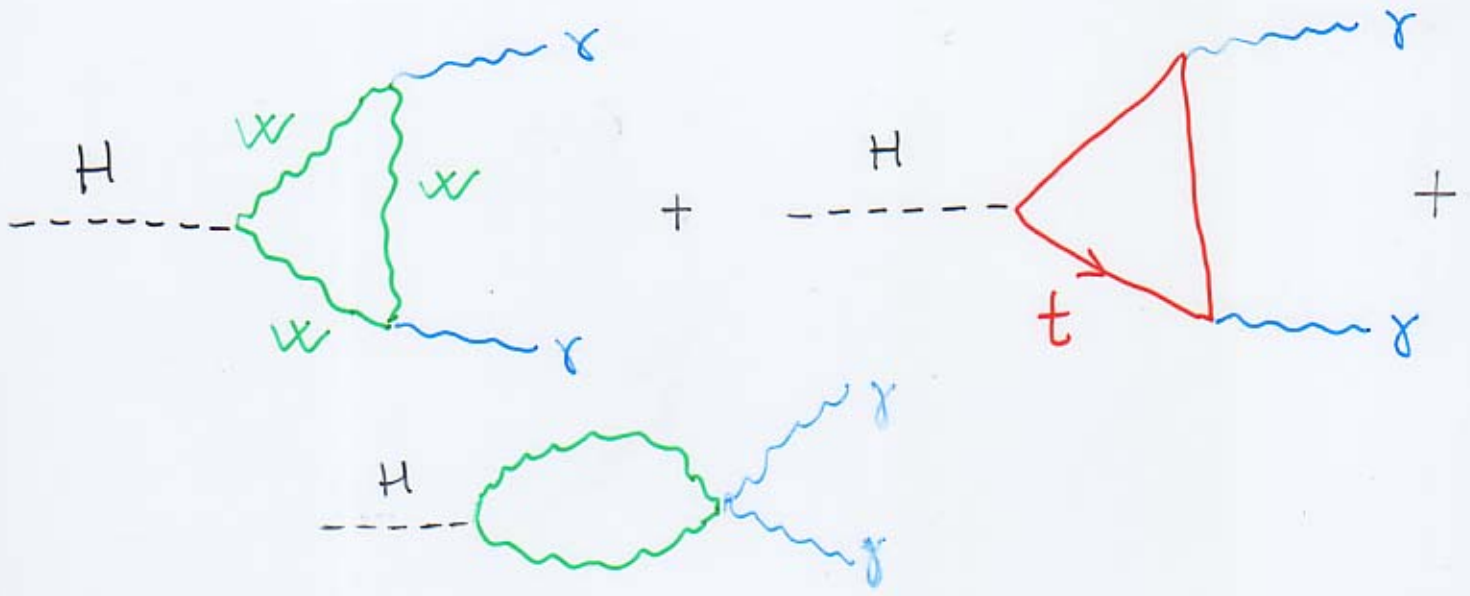


QUARKS LEGGERI CON  $W$ 'S :



6 TOPOLOGIE DIFFERENTI, DA  
 SOMMARE SUI DOPPLETTI DI  
 QUARKS e LEPTONI. ON-SHELL RENORM.

ALL'ORDINE PIU' BASSO SI HANNO  
ORA 3 AMPIEZZE DIVERSE :

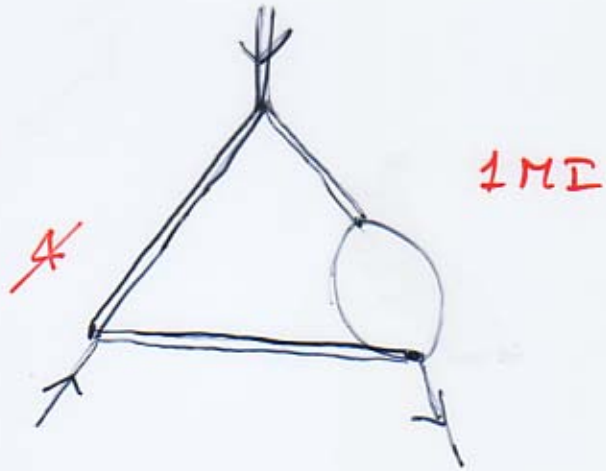
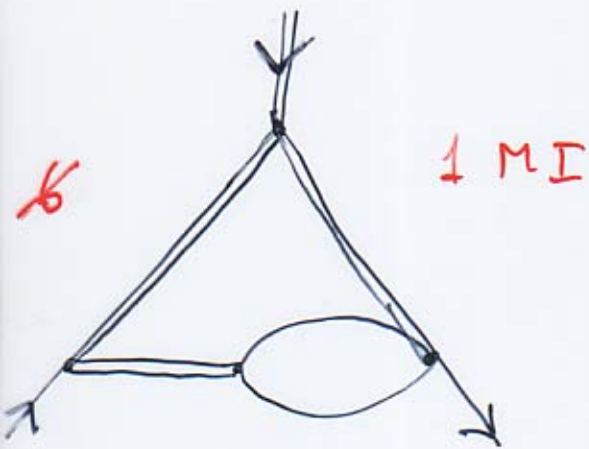
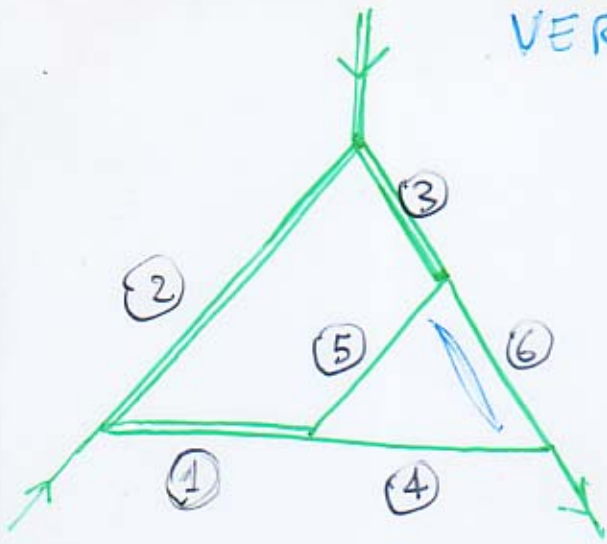


LE 3 AMPIEZZE INTERFERISCONO DISTRUT-  
TIVAMENTE, L'AMPIEZZA DEL W ~ 6  
MAGGIOR I\_

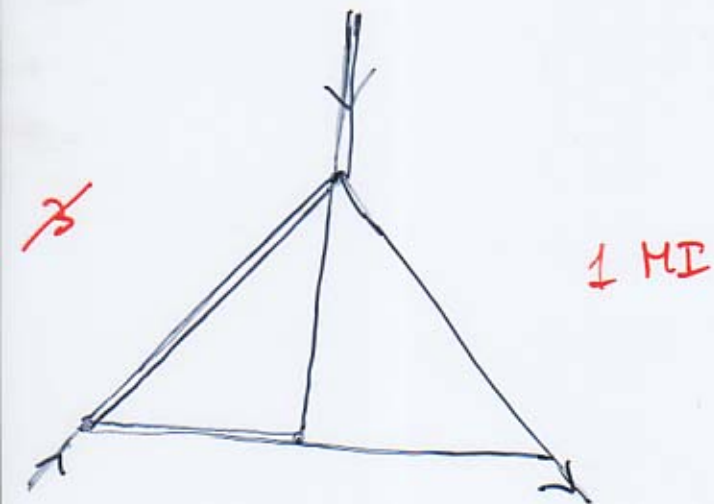
# VERTEX-INSERTION

16b

NO MI, SI RIDUCE

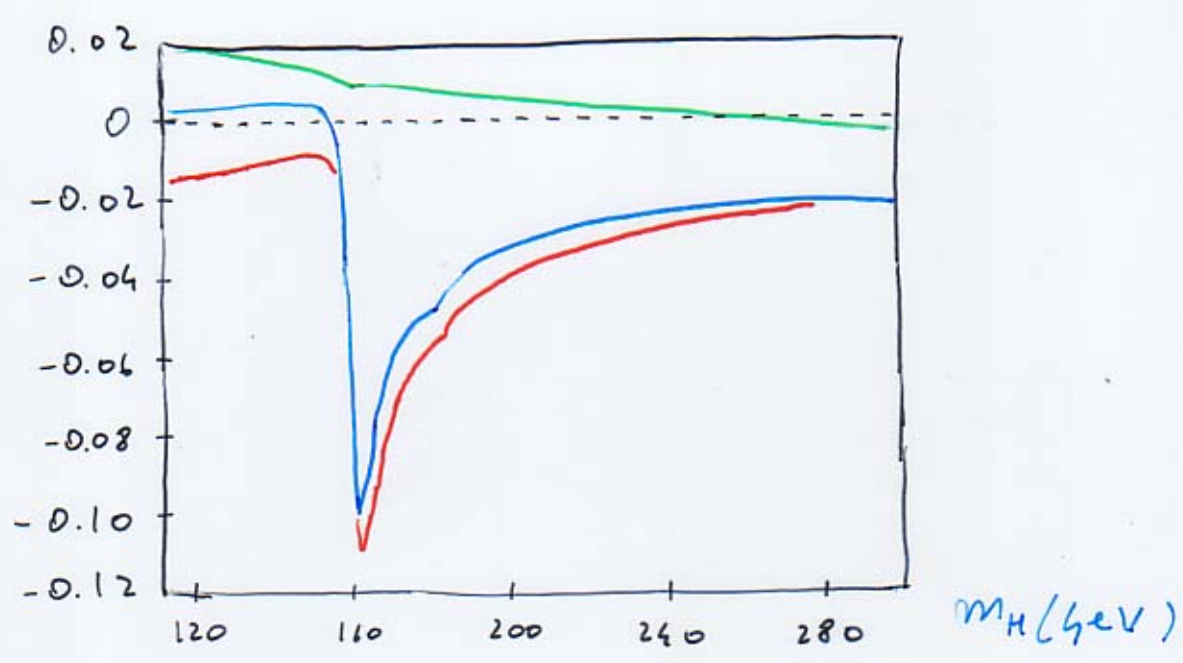


SDEN



— = EW  
 — = QCD  
 — = TOTALE

δ



GROSSE CORREZIONI PER UN HIGGS PESANTE,

$$m_H \gtrsim 2 m_W$$

SINGOLARITÀ (NON FISICA) AD  $m_H = 2 m_W$   
 REGOLATA CON LA LARGHEZZA DE W,

$$m_W \rightarrow m_W = i \Gamma_W / 2$$

PER  $m_H < 2 m_W$ , QCD ED EW CORRECTIONS  
 SI CANCELLANO TRA LORO QUASI COMPLETAMENTE,  $\Sigma < 1\%$

# CONCLUSIONI

(18)

1) IL METODO DELLE EQUAZIONI DI EVOLUZIONE NEGLI INVARIANTI CINEMATICI ESTERNI O NELLE MASSE CONSENTE DI CALCOLARE ESATTAMENTE DIAGRAMMI DI FEYNMAN, DI DIFFICILE SE NON IMPOSSIBILE CALCOLO CON METODI STANDARD.

IL METODO È NATURALMENTE SUPPORTATO DAI POLI LOGARITMI ARMONICI O DA UNA LORO GENERALIZZAZIONE

2) QUESTA TECNICA HA GIÀ DATO RISULTATI DI RILEVANZA FENOMENOLOGICA IN VARIE AREE:

1)  $6\text{jet} \propto \mathcal{O}(d_s^2)$

2)  $gg \rightarrow H$  e  $H \rightarrow \gamma\gamma$  ( $H \rightarrow \gamma\gamma$ ),

CONTRIBUTO DI FERMIONI LEGGERI  
A 2 LOOPS